# 量子ソリトンの resonant breakup

東大・教養　小西哲郎，和達三樹

## §1　概要

外力の加わった量子非線形シュレディンガー模型を考える。この外力により，1－ソリトン状態から2－ソリトン状態への遷移振幅が生ずるが，これがいくつかの振動数で発散することが計算により示された。すなわち，外力に共鳴して1－ソリトンが2－ソリトンへ分裂することがわかった。この新しく発見された現象を，「量子ソリトンの resonant breakup」と呼ぶ。計算手段として量子逆散乱法が有効に用いられたことと，ソリトン数変化に対して定量的記述を行ったこと，及び原子核物理学におけるbreakup現象との類似が重要である。

## §2　モデル

今回考えたモデルは，次のハミルトニアンで定義される；

$$H \equiv H_0 + H_1(t),$$

$$H_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \{\phi^+{}_x \phi_x + \kappa \phi^+ \phi^+ \phi \phi\}, \qquad \kappa < 0.$$

$$H_1(t) \equiv (-i\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} dx \{\phi^+ e^{i\omega t - iQx} - \phi e^{-i\omega t + iQx}\}, \quad |\varepsilon| \ll 1$$

ここで $\phi$ は次の同時刻交換関係をみたすボゾン場である；

$$[\phi(x, t), \phi(y, t)] = [\phi^\dagger(x, t), \phi^\dagger(y, t)] = 0,$$

$$[\phi(x, t), \phi(y, t)] = \delta(x-y)$$

このハミルトニアンは次の運動方程式を導く；

$$i\phi_t + \phi_{xx} - 2\kappa\phi^\dagger\phi\phi = -i\varepsilon e^{i\omega t - iQx}$$

## §3　量子非線形シュレディンガー模型（qNLS）

§2のモデルで $\varepsilon \equiv 0$ とおいたものは，量子非線形シュレディンガー模型（qNLS）と呼ばれ，量子逆散乱法を用いて解くことができる。特に，n個の粒子からなる束縛状態をつくる演

算子$R_m{}^\dagger$を構成することができ，その交換関係は

$$R_n{}^\dagger(P)R_m{}^\dagger(q)=S_{nm}(q-P)R_m{}^\dagger(q)R_n{}^\dagger\ ,$$

$$R_n(P)R_m{}^\dagger(q)=2\pi n\delta_{n\cdot m}\delta(P-q)+S_{nm}(P-q)R_m{}^\dagger(q)R_n(P)\ ,$$

$$[H_0,\ R_m{}^\dagger(q)]=\{mq^2-\frac{\kappa^2}{12}m(m^2-1)\}R_m{}^\dagger(q)\ .$$

また，$R_m{}^\dagger(q)\,|\,0>$は，粒子数$N$，運動量$P$，およびハミルトニアン$H_0$の同時固有状態である。

$$NR_m{}^\dagger(q)\,|\,0>=mR_m{}^\dagger(q)\,|\,0>,$$

$$PR_m{}^\dagger(q)\,|\,0>=mqR_m{}^\dagger(q)\,|\,0>,$$

$$H_0R_m{}^\dagger(q)\,|\,0>=\{mq^2-\frac{\kappa^2}{12}m(m^2-1)\}R_m{}^\dagger(q)\,|\,0>.$$

もとの場の演算子$\phi$をこの$R$たちで表わす式を量子ゲルファント＝レタビン方程式という。これを用いると，任意の行列要素が正確に計算できる。特に，束縛状態$R_m{}^\dagger(q)\,|\,0>$のフーリエ変換をとって$\phi(x)$をはさんだ行列要素は，古典非線形シュレディンガー模型の１－ソリトン解と，$m\to\infty$の極限で一致する。そこで，$R_m{}^\dagger(P)\,|\,0>$を〝量子１－ソリトン状態〃，また，$R_n{}^\dagger(P)R_m{}^\dagger(q)\,|\,0>$を〝量子２－ソリトン状態〃，と呼ぶことにする。

## § 4.　遷移確率

始状態$|\,i>$，終状態$|\,f>$をそれぞれ

$$|\,i>\equiv\frac{1}{N}R_N(k)\,|\,0>\qquad,$$

$$|\,f>\equiv\frac{1}{M}\cdot\frac{1}{M'}R_M{}^\dagger(q)\,R_{M'}{}^\dagger(P)\,|\,0>\ ,$$

で定義される量子１－(or２－)ソリトン状態とする。すると，１－ソリトンから２－ソリトンへの単位時間あたりの遷移確率$W$は，

$$W=\begin{cases}\varepsilon^2 2\pi\delta(E_f-E_i-\omega)\cdot\left|\int dx<\mathrm{f}\,|\,\phi(x)\,|\,\mathrm{i}>e^{iQx}\right|^2 \\ \qquad\text{if}\quad M+M'=N-1, \\ \varepsilon^2 2\pi\delta(E_f-E_i+\omega)\cdot\left|\int dx<\mathrm{f}\,|\,\phi^\dagger(x)\,|\,\mathrm{i}>e^{-iQx}\right|^2 \\ \qquad\text{if}\quad M+M'=N+1,\end{cases}$$

ここで $E_i$ 及び $E_f$ は次式で定義される；

$$H_0 | \mathrm{i} > = E_i | \mathrm{i} >, \quad H_0 | \mathrm{f} > = E_f | \mathrm{f} > .$$

$W$には，エネルギーと運動量の２つの保存則という拘束がある。そのため，終状態の $q$ と$P$，すなわち，２つのソリトン各々における１粒子あたりの運動量は，それ以外のパラメタで決ってしまう。

そこで，$N$（始状態粒子数），$k$（始状態の１粒子あたりの運動量），$M$，$M'$（終状態の２つのソリトンの粒子数），$Q$（外力の波数）を固定し，遷移確率$W$を外力の振動数$\omega$の関数として表わすと，図１のようになる。３つの$\omega$の値において$W$が発散している，すなわち，外力に共鳴して１－ソリトンから２－ソリトンへの分裂がおこっているのがわかる。この現象を「量子ソリトンの resonant breakup 」と呼ぼう。

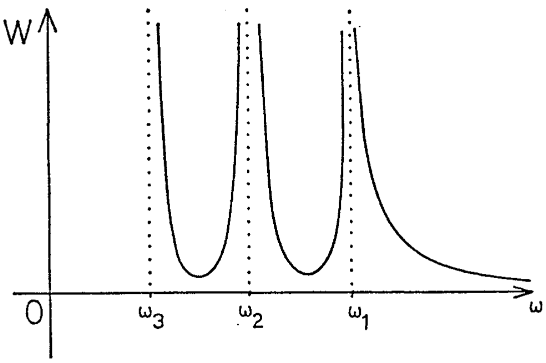



図　１

## §5.　共鳴振動数とその意味

Resonant breakupをおこす振動数 $\omega_1$，$\omega_2$，$\omega_3$ の値は解析的に求めることができる。この値を用いて終状態の１粒子あたりの運動量$P$と$q$ を求めると，次のような簡単な関係があることがわかる；

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow k = P, \quad \omega = \omega_2 \Rightarrow k = q, \quad \omega = \omega_3 \Rightarrow P = q .$$

条件　$k = P$ または $k = q$ は，終状態の２つのソリトンのうち１つが，始状態のソリトンと同じ１粒子あたりの運動量（＝〝速度〟)を持つことを意味する。量子２－ソリトンを，２つのソリトンからなる複合粒子系（おのおののソリトンはまたそれぞれ$M$個あるいは$M'$個の粒子からなる束縛状態である。)とみれば，この$k = P$あるいは$k = q$という条件は，始状態の$N$（$= M + M' + 1$）個の粒子からできるソリトンのうち一部は外場と相互作用せずに単に通り抜けてしまうような反応がおこりやすい，と解釈できる。このような現象は，原子核反応において〝breakup process〟として古くからよく知られている。

条件$P = q$は，終状態の２つのソリトンのもつ運動量（粒子あたり）が等しく，従って離れにくいことを意味している。ここでさらに$M = M'$とおけば，古典論において「二重極解」と呼ばれているものに相当する。

共鳴周波数 $\omega_i$ は，先に述べたとおり，$M$（終状態の２つの量子ソリトンのうち一方に含まれる粒子数）の関数である。（図２）

したがって，$M \ll N/2$ なる $\omega_i$ をえらべば，終状態には大きさのちがう２つのソリトンが得られるし，$M \sim N/2$ なる $\omega_i$ をえらべば，大きさのほぼ等しい２つのソリトンが得られる。

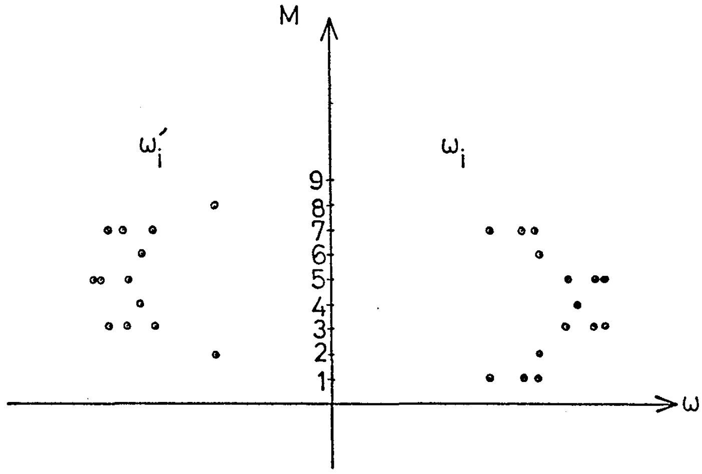



図　2

§６　今後の展望

今回発見された resonant breakup という現象が，他の量子ソリトン系及び古典ソリトン系でみつかることは大いに期待できる。また，系に散逸が加わったときに，素過程としての resonant breakup がアトラクタ間の飛びうつりにどう寄与するか興味深い。更に基本的な問題として，可積分量子系の特徴付けと量子系のKAM理論が重要である。

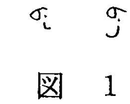
ソリトンは，発見されて以来，その安定性が注目を集めてきた。一方，系が複雑な挙動を示すためには，ソリトン数が変化するようなプロセスが重要である。ソリトンの生成と消滅に関して resonant breakup は基本的な過程であると予想することが可能である。

## ３状態ＩＲＦの厳密解
## ―ロジャース，ラマヌジャン恒等式のゴルドン一般化―

東大・教養　国場敦夫，阿久津泰弘，和達三樹

ＩＲＦとは２次元正方格子上の４体スピン相互作用の模型である。各格子点 $i \in Z^2$ にスピン変数 $\sigma_i \in S$ を置き，図１のような格子の最小単位（ face または plaquette ）に minimal な相互作用エネルギー $\varepsilon(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l)$ を与える。(*I*nteraction *r*ound a *f*ace)

ここで，$S$ は適当な数の集合であり，例えば $S=\{0, 1\}$ なら２状態模型，$S=\{0, 1, 2\}$ なら３状態模型 etc … となる。系の全エネルギーは




$$E = \sum_{\text{faces}} \varepsilon(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l) \tag{1}$$

図　1